CONCOURS 1999 POUR LE RECRUTEMENT D'ELEVES

TITULAIRES DE L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE

ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

- OPTION MATHEMATIQUES -

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages. Si le candidat détecte ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La clarté, la concision et la précision des réponses seront des éléments importants d'appréciation. Aucune réponse floue ou incomplète, aucune rature ou surcharge, ne seront prises en considération.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^n$, on appelle épigraphe de f et on note $\mathcal{E}(f)$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{E}(f) = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mu \geq f(x)\},$$

et on dira que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si $\mathcal{E}(f)$ est fermé.

1 Fonctions s.c.i

1. Montrer que si f est s.c.i. alors, pour tout μ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{E}_\mu(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu \geq f(x)\}$ est fermé. Réciproquement montrer que si pour tout μ dans $\mathbb{R}$ l'ensemble $\mathcal{E}_\mu(f)$ est fermé alors f est s.c.i. On pourra remarquer que si une suite (x_n, μ_n) de $\mathcal{E}(f)$ converge vers (x^*, μ^*) alors,

$$\forall \nu > \mu^*, \exists n_0, \forall n \geq n_0, x_n \in \mathcal{E}_\nu(f).$$

2. Montrer que si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions continues uniformément majorées par une constante M alors la fonction $f = \sup_{i \in I} f_i$ est s.c.i.

3. Montrer en exhibant un contre-exemple que la borne inférieure d'une famille de fonctions continues uniformément minorées n'est pas nécessairement s.c.i..

4. Montrer que si f et g sont s.c.i. alors $f+g$ est s.c.i. (on pourra considérer le complémentaire de $\mathcal{E}_\mu(f+g)$ pour μ réel donné).

5. Montrer que si f et g sont s.c.i à valeurs strictement positives alors fg est s.c.i..

6. Montrer que si f est s.c.i. et que K est un compact de $\mathbb{R}^n$ alors il existe x_0 dans K tel que $\inf_{x\in K} f(x) = f(x_0)$.

2 Fonctions Q-lipschitziennes

Soit à présent Q un cône de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, c'est à dire un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (q', q'') \in Q, \forall \lambda \geq 0, \lambda(q', q'') \in Q$$

et supposons que Q est d'intérieur non vide.

On dira qu'une fonction f est Q-lipschitzienne si elle est s.c.i. et si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (q', q'') \in Q, \qquad f(x) + q'' \geq f(x + q').$$

1. Montrer que f est Q-lipschitzienne si et seulement si $\mathcal{E}(f)$ est fermé et vérifie :

$$[\mathcal{E}(f) + Q] \subset \mathcal{E}(f).$$

2. Soit k un réel positif et soit Q_k défini par

$$Q_k = \{(q', q'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : q'' \geq k\|q'\|\}.$$

Montrer que f est Q_k-lipschitzienne si et seulement si elle est k-lipschitzienne, i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |f(x) - f(y)| \leq k \|x - y\|.$$

3. Soit $Q^+ = \{(q', q'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : q'_i \leq 0 \text{ pour } i = 1, \cdots, n \text{ et } q'' \geq 0\}$, montrer que f est Q^+-lipschitzienne si et seulement si f est s.c.i. et croissante par rapport à chacune de ses variables.

4 On désignera par $Lip(Q)$ l'ensemble des fonctions Q-lipschitziennes pour Q donné. Soient Q' et Q'' deux cônes quelconques de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Montrer que si l'on a $Q'' \subset Q'$ alors $Lip(Q') \subset Lip(Q'')$.

5. Montrer que $Lip(Q) = Lip(\tilde{Q})$ où

$$\tilde{Q} = \{(\tilde{q}', \tilde{q}'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \exists (q', q'') \in Q, \quad \tilde{q}' = q', \tilde{q}'' \geq q''\}.$$

6. Montrer que $Lip(Q) = Lip(\bar{Q})$ où $\bar{Q}$ désigne l'adhérence de Q.

7. Soit $(e', e'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que $e'' < 0$. Vérifier que si $(e', e'') \in Q$ alors soit e' est non nul soit $Lip(Q)$ est vide.

8. Montrer qu'il existe $e = (e', e'')$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ avec $e'' > 0$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tels que si l'on note Q_ε^e le cône défini par

$$Q_\varepsilon^e = \{\lambda(q', q'') : \lambda \geq 0, (q', q'') \in B((e', e''), \varepsilon)\}$$

(où $B((e', e''), \varepsilon)$ désigne la boule de centre (e', e'') et de rayon ε) alors $Lip(Q) \subset Lip(Q_\varepsilon^e)$.

3 Fonctions Q-lipschitziennes et fonctions lipschitziennes

Soit $e = (e', e'')$ un élément de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ avec $e'' > 0$ et munissons $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de la structure euclidienne produit qui s'identifie alors à la structure canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. On désignera par $e^\perp$ le sous espace de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ défini par

$$e^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z \cdot e = 0\}$$

où $z \cdot e$ désigne le produit scalaire canonique de z et de e dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

On remarquera que l'on a également

$$e^\perp = \{z = (z', z'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z' \cdot e' + z''e'' = 0\}$$

où $z' \cdot e'$ désigne ici le produit scalaire canonique de z' et de e' dans $\mathbb{R}^n$.

L'espace $e^\perp$ sera muni, dans ce qui suit, de la structure euclidienne induite par $\mathbb{R}^{n+1}$.

On supposera enfin que e est de norme 1.

Soit, à présent f une fonction dans $Lip(Q_\varepsilon^e)$ et définissons l'application λ_f de $e^\perp$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\lambda_f(u) = \inf\{t \in \mathbb{R} : u + te \in \mathcal{E}(f)\}$$

1. Montrer que l'application λ_f est bien définie sur $e^\perp$ et que :

$$\{t \in \mathbb{R} : u + te \in \mathcal{E}(f)\} = [\lambda_f(u), +\infty[.$$

2. Soit (x, y) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, montrer que si $y < f(x)$ alors

$$(x, y) \cdot e < \lambda_f(proj_{e^\perp}(x, y))$$

et que si $y = f(x)$ alors

$$(x, y) \cdot e = \lambda_f(proj_{e^\perp}(x, y))$$

3. Montrer que si f et g sont deux fonctions de $Lip(Q_\varepsilon^e)$ telles que $\lambda_f = \lambda_g$ alors $f = g$.

4. Montrer que pour tout f dans $Lip(Q_\varepsilon^e)$, la fonction λ_f est $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne sur $e^\perp$ c'est à dire que l'on a

$$\forall (u, v) \in e^\perp \times e^\perp, |\lambda_f(u) - \lambda_f(v)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|u - v\|$$

4 Convergence des fonctions Q-lipschitziennes

Dans la suite on dira qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $Lip(Q_\varepsilon^e)$ converge dans la direction de e vers une fonction f du même ensemble si la suite $(\lambda_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers λ_f.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $Lip(Q_\varepsilon^e)$ convergeant dans la direction de e vers une fonction f du même ensemble et soit x dans $\mathbb{R}^n$ tel que f est continue au point x. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ (on pourra faire appel à la question 3.2. en posant $y = f_n(x)$).

2. Montrer que si la fonction f précédente est continue alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

5 Convergence des intégrales

On rappelle que e est de norme 1 et on supposera dans la suite que n est égal à 1 ou à 2 si bien que les fonctions considérées sont des fonctions de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, le candidat est supposé ne se poser aucune question quant à l'existence des diverses intégrales proposées, l'intégrale restant pour les fonctions et les domaines concernés une forme linéaire positive douée des propriétés usuelles.

Soit f une fonction de $Lip(Q_\varepsilon^e)$ bornée par une constante M, soit a un réel strictement positif, et soit K l'ensemble défini par $K = [-a, a]^n$,

1. Montrer que l'on a alors

$$\int_K f(x)dx = \int_{-M\leq y\leq f(x); x\in K} dxdy - \int_{-M\leq y\leq 0; x\in K} dxdy.$$

2. Soient Δ et Δ' les deux ensembles définis par

$$\Delta = \{(x,y) \in K \times [-M, \infty[: (x,y) \cdot e < \lambda_f(proj_{e^\perp}(x,y))\}$$

et

$$\Delta' = \{(x,y) \in K \times [-M, \infty[: (x,y) \cdot e \leq \lambda_f(proj_{e^\perp}(x,y))\}$$

montrer que

$$\int_\Delta dxdy + M \int_K dx \leq \int_K f(x)dx \leq \int_{\Delta'} dxdy + M \int_K dx$$

(on pourra faire appel au résultat de la question 3.2.).

3. Soit g une autre fonction dans $Lip(Q_e^e)$ bornée par la même constante M et telle que $f \geq g$. Par ailleurs, soit Γ l'ensemble défini par

$$\Gamma = \{(x,y) \in K \times [-M, \infty[: \lambda_g(proj_{e^\perp}(x,y)) < (x,y) \cdot e \leq \lambda_f(proj_{e^\perp}(x,y))\}$$

montrer que l'on a $\int_K (f-g) \leq \int_\Gamma dxdy$.

4. On définit à présent Γ' par

$$\Gamma' = \{(u,v) \in proj_{e^\perp}(K \times [-M;M]) \times proj_e(K \times [-M;M]) : \lambda_g(u) \leq v \leq \lambda_f(u)\}.$$

Montrer que $\int_K (f-g) \leq \int_{\Gamma'} dudv$ et en déduire alors que

$$\int_K (f-g) \leq \int_{proj_{e^\perp}(K \times [-M;M])} (\lambda_f - \lambda_g)$$

5. Soit (f_n) une suite de fonctions de $Lip(Q_e^e)$ uniformément bornées par une constante M et convergeant dans la direction de e vers une fonction f de $Lip(Q_e^e)$. On notera $\tilde{f}_n$ la fonction $\max(f_n, f)$, λ_n la fonction λ_{f_n} et $\tilde{\lambda}_n$ la fonction $\lambda_{\tilde{f}_n}$.

a) Montrer que $\mathcal{E}(\tilde{f}_n) = \mathcal{E}(f_n) \cap \mathcal{E}(f)$

b) En déduire que $\tilde{\lambda}_n \leq max(\lambda_n, \lambda)$

c) En conclure que $\tilde{\lambda}_n = max(\lambda_n, \lambda)$

d) Montrer alors, en utilisant le 5. et en remarquant que

$$\int |f_n - f| = \int |\tilde{f}_n - f_n| + |\tilde{f}_n - f|,$$

que l'on a

$$\int_K |f_n - f| \leq \int_{proj_e^\perp(K \times [-M;M])} (\tilde{\lambda}_n - \lambda) + \int_{proj_e^\perp(K \times [-M;M])} (\tilde{\lambda}_n - \lambda_n)$$

e) En conclure que $\int_K |f_n - f|$ tend vers zéro.